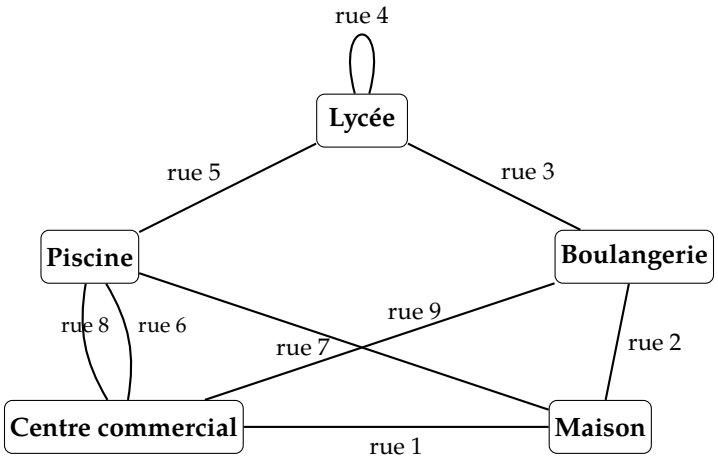
Graphes

Structures de données

① Premières définitions

1.1 Exemple introductif

On modélise un plan de quartier dans lequel les lieux sont les sommets et les rues sont les arêtes :



1.2 Définitions

— Un **graphe** est la donnée d'un ensemble de **sommets** et d'un ensemble d'**arêtes** qui relient deux sommets.

— L'**ordre** du graphe est le nombre de ses sommets. Le graphe ci-dessus est d'ordre 5.

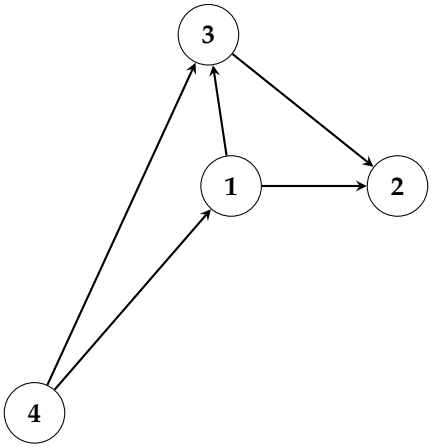
— Une **boucle** est une arête reliant un sommet à lui-même (la rue 4 ci-dessus).

— Deux sommets reliés par une arête sont dits **adjacents**.

— Un graphe **simple** est un graphe sans boucle et tel qu'entre deux sommets, il y a au plus une arête.

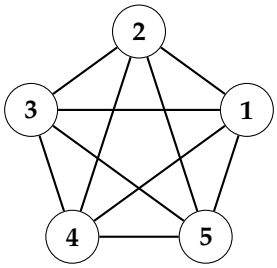
1.3 Graphe orienté

Un graphe **orienté** est un graphe dont les arêtes ont un sens de parcours. On parle alors d'**arcs** au lieu d'arêtes.



1.4 Graphe complet

Un graphe **complet** est un graphe dont tous les sommets sont reliés deux à deux par une unique arête. Le graphe complet d'ordre 5 est noté K_5 :



1.5 Degré d'un sommet

Le **degré** d'un sommet est le nombre de fois où le sommet est l'extrémité d'une arête.

— Lorsque le graphe est simple, le degré d'un sommet est simplement le nombre d'arêtes issues de ce sommet.

— Une boucle compte pour **deux** dans le degré.

Exemple. Dans le graphe du quartier : deg(M) = 3 (rues 1, 2, 7), deg(B) = 3 (rues 2, 3, 9), deg(L) = 2+2 = 4 (rues 3, 5 et la boucle qui compte double), deg(P) = 4 (rues 5, 6, 7, 8), deg(CC) = 4 (rues 1, 6, 8, 9).

1.6 Théorème 1 (somme des degrés)

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre total d'arêtes :

$$\sum_{\text{S sommet}} \deg(\text{S}) = 2 \times \text{nombre d'arêtes.}$$

Vérification. $4 + 4 + 4 + 3 + 3 = 18 = 2 \times 9$ arêtes. ✓

Conséquence. Dans un graphe complet d'ordre n, chaque sommet est de degré $n - 1$.

② Chaînes sur un graphe

2.1 Définitions

— Une **chaîne** (ou chemin) est une suite d'arêtes mises bout à bout. La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes la constituant.

— Un **cycle** est une chaîne dont les extrémités coïncident, chaque arête étant prise une seule fois.

— Un graphe est **connexe** lorsque, pour chaque paire de sommets, il existe au moins une chaîne reliant les deux sommets. Autrement dit, il est « d'un seul tenant ».

— (*Complément hors programme.*) Une **chaîne eulérienne** passe par toutes les arêtes du graphe, chacune une seule fois. Si elle revient au sommet de départ, c'est un **cycle eulérien**.

2.2 Exemple

Le graphe du quartier admet une chaîne eulérienne : Maison – Centre commercial – Piscine – Lycée – Lycée – Boulangerie – Centre commercial – Piscine – Maison – Boulangerie (9 arêtes, dont la boucle sur le Lycée).

2.3 Théorème 2 (condition d'Euler)

Un graphe admet une chaîne eulérienne si, et seulement si :

1. *le graphe est connexe ;*
2. *il possède exactement 0 ou 2 sommets de degré impair.*

Si les sommets de degré impair sont au nombre de 0, c'est un cycle eulérien.

Vérification. Le graphe du quartier est connexe, et les sommets de degré impair sont Maison (3) et Boulangerie (3), soit exactement 2. La chaîne eulérienne part de la Maison (ou de la Boulangerie) et arrive à l'autre.

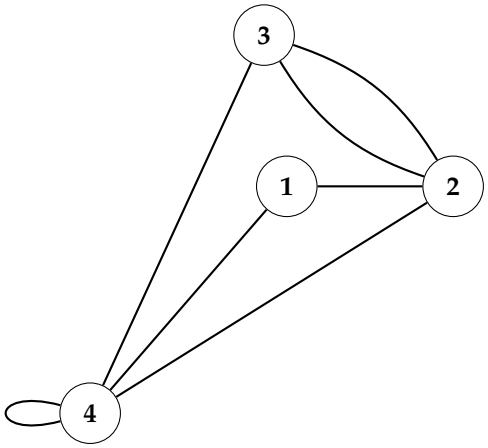
Remarque. L'hypothèse « le graphe est connexe » est indispensable !

③ Matrice d'adjacence

3.1 Définition

Soit G un graphe d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n. La **matrice d'adjacence** de G est la matrice carrée A de taille n où a_{ij} est le nombre d'arêtes reliant les sommets i et j (ou le nombre d'arcs de i vers j dans un graphe orienté).

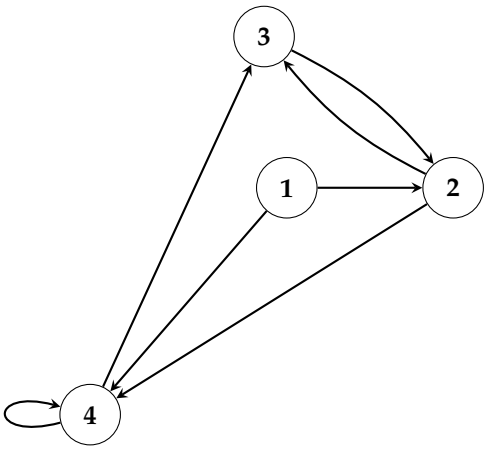
3.2 Exemple 1 : graphe non orienté



$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce graphe n'est pas simple (il possède une arête double entre 2 et 3, et une boucle sur 4). La matrice est **symétrique** (car le graphe est non orienté). Le coefficient $a_{23} = 2$ indique deux arêtes entre les sommets 2 et 3. Le coefficient $a_{44} = 1$ indique une boucle.

3.3 Exemple 2 : graphe orienté



$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice n'est **pas symétrique** : $a_{12} = 1$ (arc de 1 vers 2) mais $a_{21} = 0$ (pas d'arc de 2 vers 1). Le coefficient $a_{44} = 1$ indique une boucle sur le sommet 4.

3.4 Propriétés

— Graphe non orienté simple : la somme d'une ligne = degré du sommet.

— Graphe non orienté : la matrice est symétrique ($a_{ij} = a_{ji}$).

— Graphe complet d'ordre n : matrice remplie de 1 sauf la diagonale (remplie de 0).

— Graphe orienté : la somme de tous les coefficients = nombre d'arcs.

3.5 Théorème 3 (puissances de la matrice)

(*Complément hors programme.*) *Soit* G *un graphe et* A *sa matrice d'adjacence. Le coefficient* m_{ij} *de la matrice* A^p *est le nombre de chaînes de longueur* p *reliant le sommet* i *au sommet* j.

Exemple. Avec un graphe non orienté simple à 4 sommets (1–2, 1–4, 2–3, 3–4) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Le coefficient $a_{13}^{(2)} = 2$ signifie qu'il existe 2 chaînes de longueur 2 reliant le sommet 1 au sommet 3 : $1 \to 2 \to 3$ et $1 \to 4 \to 3$.

④ Graphes pondérés

4.1 Définitions

— Un graphe est dit **étiqueté** lorsque ses arêtes portent des étiquettes (nombres, symboles, etc.).

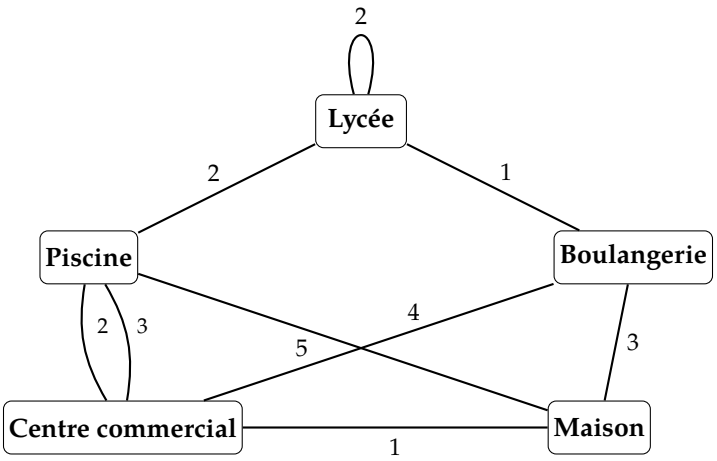
— Un graphe **pondéré** est un graphe étiqueté dont les étiquettes sont des nombres positifs appelés **poids**.

— Le **poids d'une chaîne** est la somme des poids des arêtes qui la composent.

— Une **plus courte chaîne** entre deux sommets est une chaîne de poids minimal.

4.2 Exemple

Le graphe du quartier, muni des distances en km :



— Chemin Maison → Boulangerie → Lycée : poids 3 + 1 = 4 km (2 arêtes).

— Chemin Maison → Centre commercial → Piscine → Lycée : poids 1 + 3 + 2 = 6 km (3 arêtes).

— Chemin Maison → Piscine → Lycée : poids 5 + 2 = 7 km (2 arêtes).

Le chemin le plus court en poids (4 km) est bien le Maison → Boulangerie → Lycée, qui utilise l'arête de la rue 3 (de poids 1). Le chemin le plus court en poids n'est pas nécessairement celui qui traverse le moins d'arêtes. La recherche du plus court chemin dans un graphe pondéré fait l'objet de l'algorithme de Dijkstra, étudié dans le prochain chapitre.